Übung

Inhalt

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Inverse Kinematik

Euler vs. Roll-Pitch-Yaw

Euler

- Interpretation von links nach rechts
- Jede Drehung bezieht sich auf das neue Koordinatensystem
- Drehung um jeweils veränderte Achsen

Roll-Pitch-Yaw

- Interpretation von rechts nach links
- Jede Drehung bezieht sich auf das BKS
- Drehung jeweils um unveränderte Achsen

1.1 ZX‘Z‘‘ Eulerwinkel

$$R = R_z(\alpha) R_{x'}(\beta) R_{z''}(\gamma)$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sin(\beta) \\ 0 & sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\gamma) - sin(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) & -cos(\alpha)sin(\gamma) - sin(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) & sin(\alpha)sin(\beta) \\ sin(\alpha)cos(\gamma) + cos(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) & -sin(\alpha)sin(\gamma) + cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) & -cos(\alpha)sin(\beta) \\ sin(\beta)sin(\gamma) & sin(\beta)cos(\gamma) & cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

1.2 Roll-Pitch-Yaw Winkel (XYZ Konvention)

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) & -cos(\gamma)sin(\alpha) + sin(\beta)cos(\alpha)sin(\gamma) & sin(\gamma)sin(\alpha) + sin(\beta)cos(\alpha)cos(\gamma) \\ sin(\alpha)cos(\beta) & cos(\gamma)cos(\alpha) + sin(\beta)sin(\alpha)sin(\gamma) & -sin(\gamma)cos(\alpha) + sin(\beta)sin(\alpha)cos(\gamma) \\ -sin(\beta) & sin(\gamma)cos(\beta) & cos(\gamma)cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

Rotation mit Quaternionen

- Gegeben 3-dim. Einheitsvektor **u**, Winkel θ dann repräsentiert das Quaternion

$$q = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \vec{u}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

eine Rotation um mit Rotationsachse **u** mit dem Winkel θ.

1.3 Quaternionen, Allgemeine Rotationsmatrix

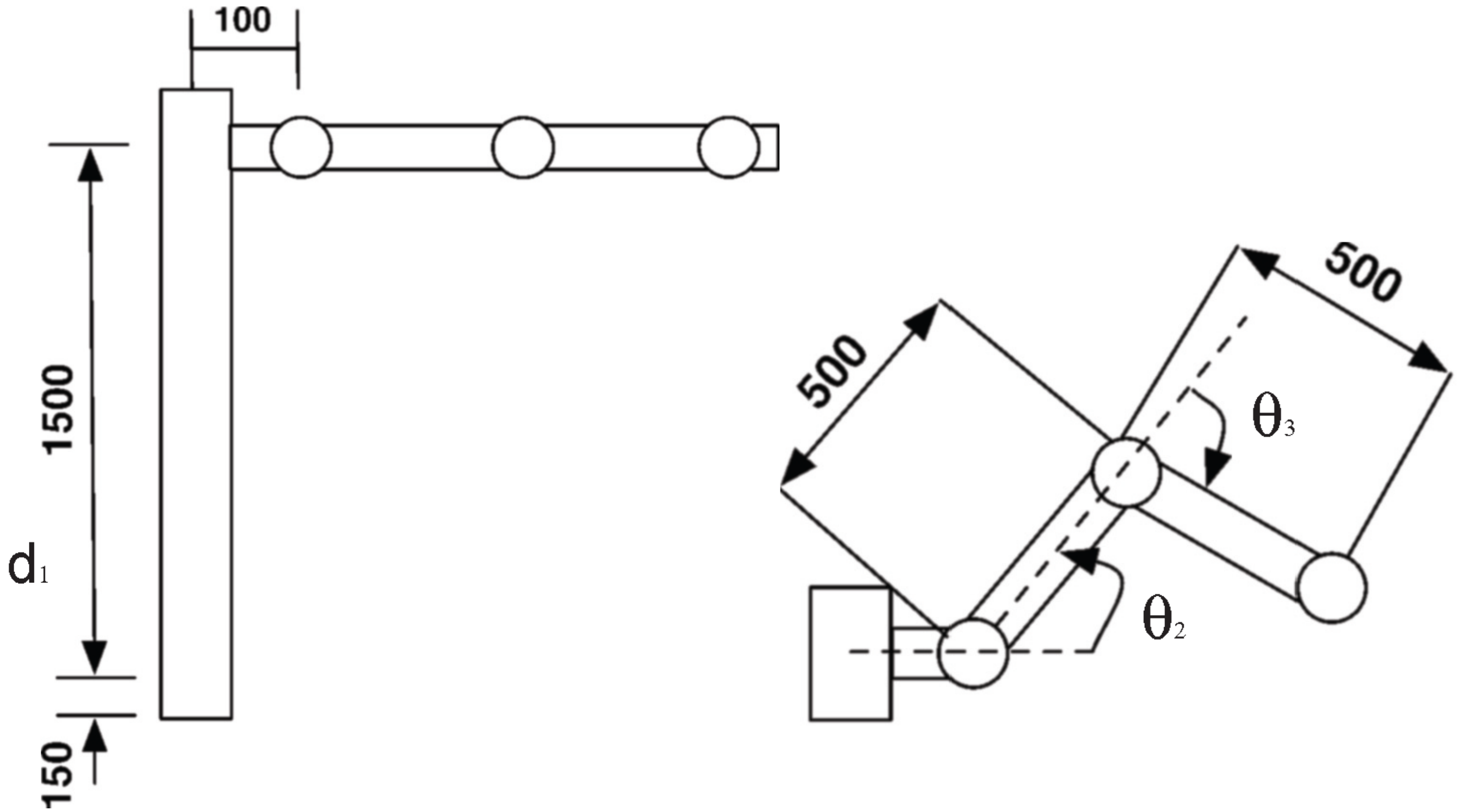
Allgemeine Formulierung der Rotationsmatrix **R** um einen Einheitsvektor **v** mit dem Winkel **α**:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha)+v_1^2\left(1-cos(\alpha)\right) & v_1v_2\left(1-cos(\alpha)\right)-v_3sin(\alpha) & v_1v_3\left(1-cos(\alpha)\right)+v_2sin(\alpha) \\ v_2v_1\left(1-cos(\alpha)\right)+v_3sin(\alpha) & cos(\alpha)+v_2^2\left(1-cos(\alpha)\right) & v_2v_3\left(1-cos(\alpha)\right)-v_1sin(\alpha) \\ v_3v_1\left(1-cos(\alpha)\right)-v_2sin(\alpha) & v_3v_2\left(1-cos(\alpha)\right)+v_1sin(\alpha) & cos(\alpha)+v_3^2\left(1-cos(\alpha)\right) \end{pmatrix}$$

Inhalt

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik

D.-H. Konvention



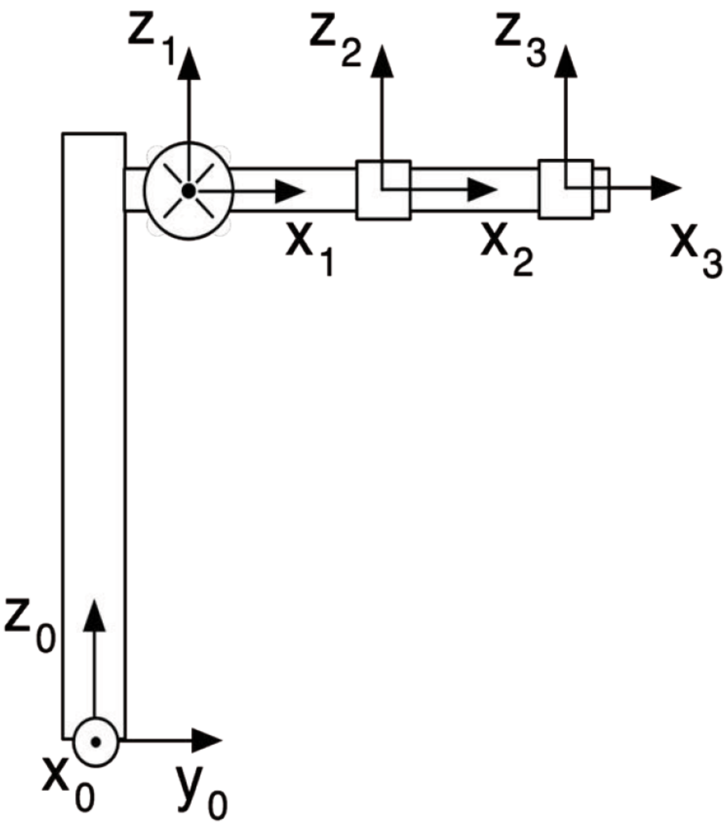
D.-H. Konvention

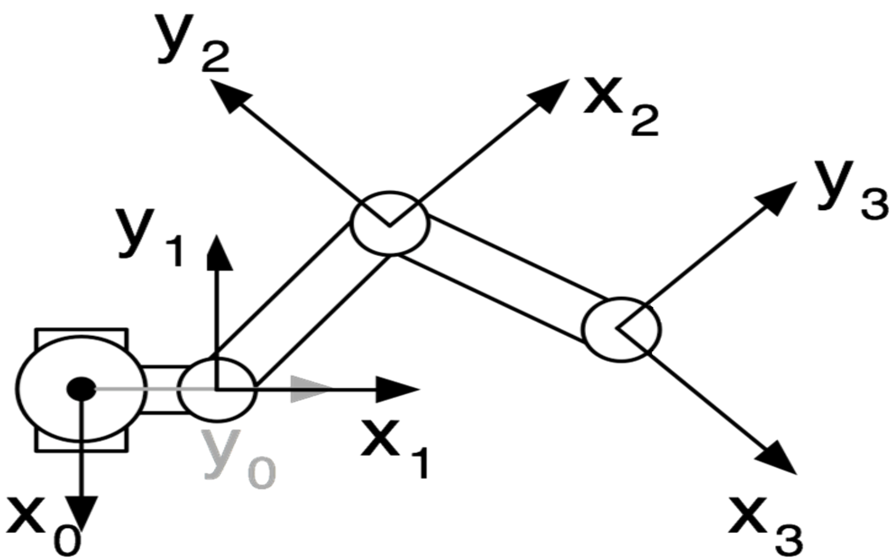
2.1 Bestimmung der Koordinatensysteme

1. Skizze des Manipulators
2. Identifiziere und nummeriere die Gelenke (Basis=1, Letztes Gelenk = n)
3. Zeichne die Achsen $\mathbf{z_{i-1}}$ für jedes Gelenk **i**
4. Bestimme die Parameter $\mathbf{a_i}$ zwischen $\mathbf{z_{i-1}}$ und $\mathbf{z_i}$
5. Zeichne die x_i -Achsen

D.-H. Konvention

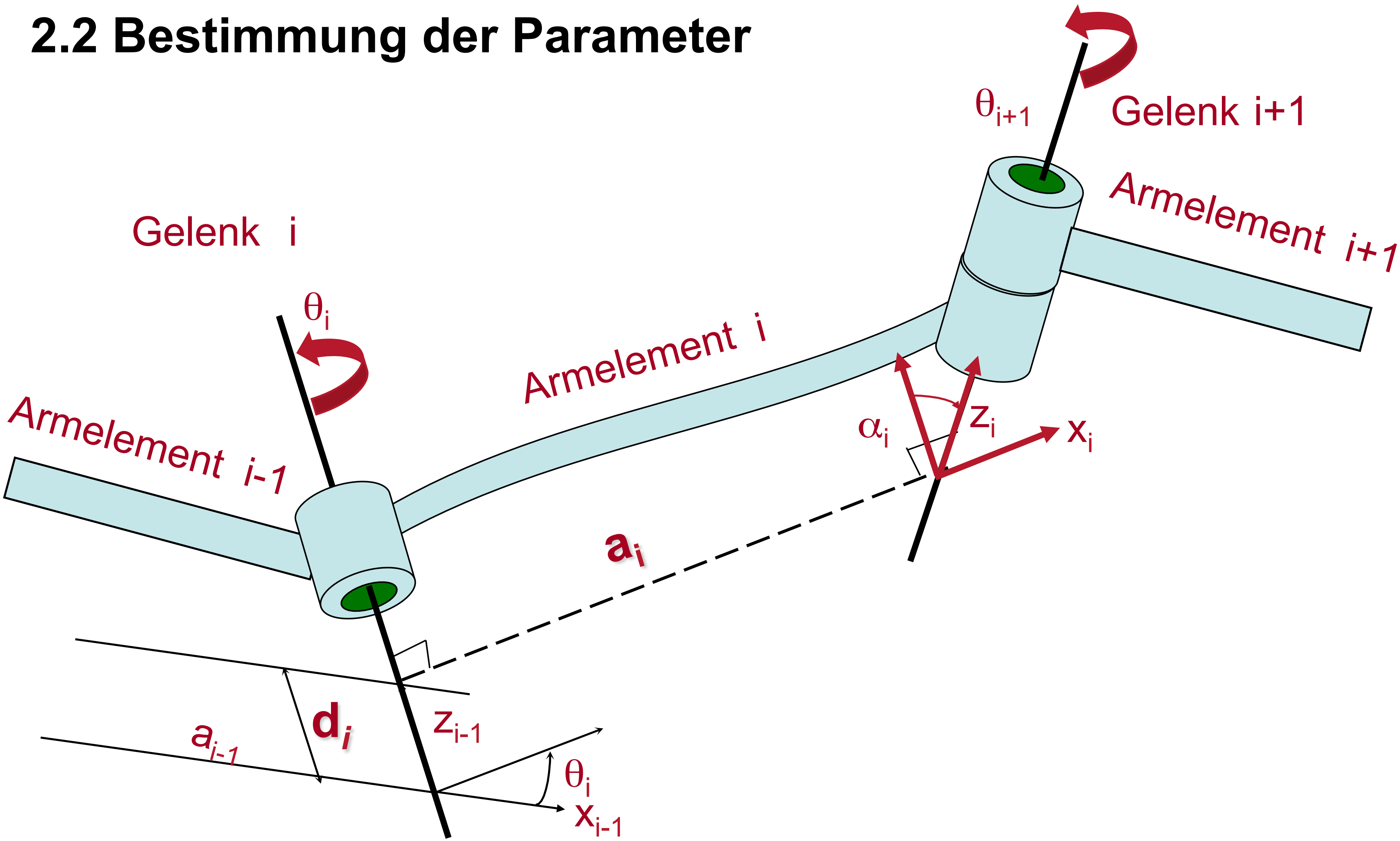
2.1 Bestimmung der Koordinatensysteme





D.-H. Konvention

2.2 Bestimmung der Parameter



2.2 Bestimmung der Parameter

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Gelenkwinkel	θ	variabel	invariant
Gelenkabstand	d	invariant	variabel
Länge Armelement	a	invariant	invariant
Verwindung	α	invariant	invariant

2.2 Bestimmung der Parameter

	d	**θ**	**a**	**α**
Gelenk 1	$150 <= d_1 <= 1650$	90°	100	0°
Gelenk 2	$d_2 = 0$	θ_2	500	0°
Gelenk 3	$d_3 = 0$	θ_3	500	0°

D.-H. Konvention

Transformation von OKS_{i-1} auf OKS_i

1. eine Rotation θ_i um die $\mathbf{z}_{i-1}$-Achse damit die $\mathbf{x}_{i-1}$-Achse parallel zu der $\mathbf{x}_i$-Achse liegt

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. eine Translation $\mathbf{d}_i$ entlang der $\mathbf{z}_{i-1}$-Achse zu dem Punkt, wo sich $\mathbf{z}_{i-1}$ und $\mathbf{x}_i$ schneiden

$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D.-H. Konvention

3. eine Translation $\mathbf{a_i}$ entlang der $\mathbf{x_i}$-Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. eine Rotation α_i um die $\mathbf{x_i}$-Achse, um die $\mathbf{z_{i-1}}$-Achse in die $\mathbf{z_i}$ -Achse zu überführen

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D.-H. Konvention

In Matrizenschreibweise lautet die Denavit-Hartenberg (DH) Transformation von Armelement i-1 auf i:

$$A_{i-1,i} = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Gesamttransformation

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2+\theta_3)-500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2+\theta_3)+100+500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inhalt

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik

3. Vorwärtskinematik

$$T_{TCP} = A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2+\theta_3)-500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2+\theta_3)+100+500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

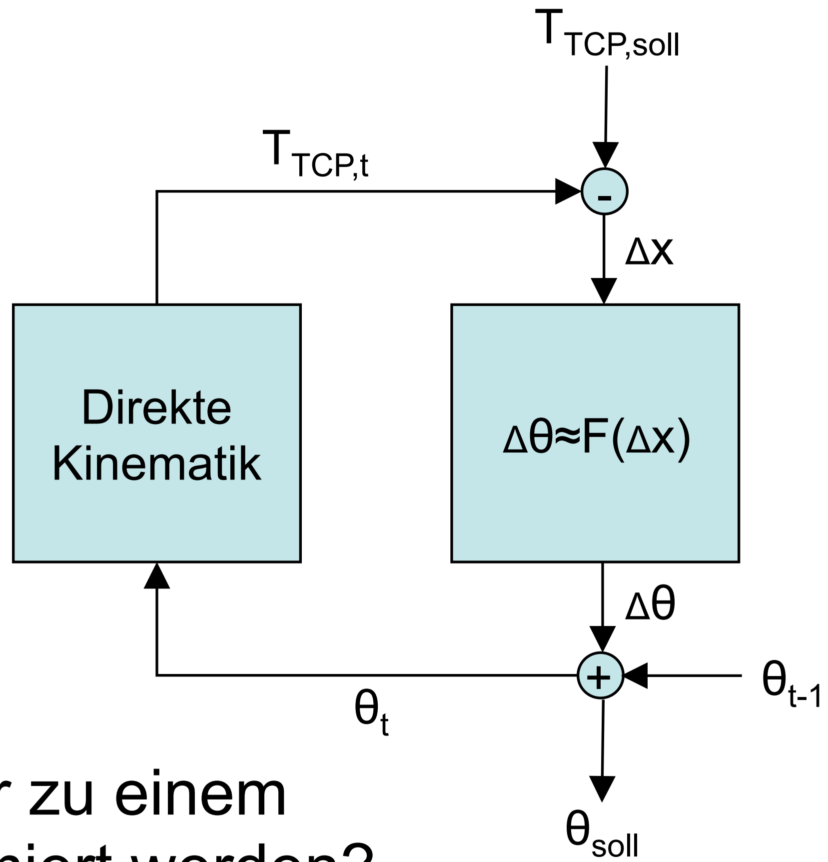
Inhalt

- Euler, Roll-Pitch-Yaw, Quaternionen
- D.-H. Konvention
- Vorwärtskinematik
- Differentielle Inverse Kinematik

Differentielle Inverse Kinematik

Es wird iterativ versucht, eine Lösung für den Gelenkwinkelvektor $\boldsymbol{\theta}$ zu finden.

- Berechne $T_{TCP,t}$ in Iteration t aus Gelenkwinkelstellungen θ_t (θ_0=Stellung des Roboters)
- Berechne Fehler Δx aus Sollposition des TCP und berechneter Position
- Benutze approximiertes inverses kinematisches Modell F um Gelenkwinkelfehler $\Delta\theta$ zu berechnen
- Berechne $\theta_{t+1}=\theta_t+\Delta\theta$
- Fahre mit Iteration t+1 fort



Wie kann der Gelenkwinkelfehler zu einem Fehler in der TCP-Lage approximiert werden?

Differentielle Inverse Kinematik

Ansatz

1. Vorwärtskinematik als Funktion:

$$x(t) = f\left(\theta(t)\right)$$

x(t): Beschreibungsvektor der TCP Lage
θ(t): Gelenkwinkelstellungen

2. Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = J(\theta)\,\dot{\theta}(t)$$

x•(t): Geschwindigkeiten des TCP
θ•(t): Winkelgeschwindigkeiten der Gelenke
J(θ): Jacobi Matrix

3. Übergang zum Differenzenquotienten:

$$\Delta x \approx J(\theta)\,\Delta\theta$$

Δx: Fehler in der TCP Lage
Δθ: Fehler im Gelenkwinkel

4. Umkehrung:

$$\Delta\theta \approx J^{-1}(\theta)\Delta x$$

Differentielle Inverse Kinematik

Kinematisches Modell

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & -500\sin(\theta_2+\theta_3) - 500\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & 500\cos(\theta_2+\theta_3)+100+500\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Differentielle Inverse Kinematik

Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -500cos(\theta_2+\theta_3) - 500cos(\theta_2) & -500cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & -500sin(\theta_2+\theta_3) - 500sin(\theta_2) & -500sin(\theta_2+\theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{500}\frac{sin(\theta_2+\theta_3)}{sin(\theta_3)} & \frac{1}{500}\frac{cos(\theta_2+\theta_3)}{sin(\theta_3)} & 0 \\ \frac{1}{500}\frac{sin(\theta_2+\theta_3)+sin(\theta_2)}{sin(\theta_3)} & \frac{1}{500}\frac{-cos(\theta_2+\theta_3)-cos(\theta_2)}{sin(\theta_3)} & 0 \end{pmatrix}$$